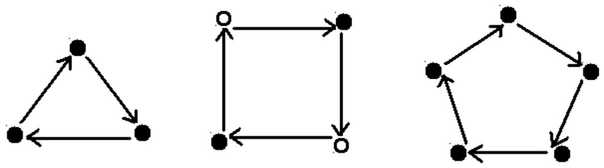
Noyau d’un graphe et théorie des jeux

Définition

Le noyau *N* d’un graphe orienté est formé d’une partie de ses sommets, telle que
- **les sommets de *N* n’ont aucun arc les joignant deux à deux**
- **chaque sommet qui n’est pas dans *N* a un successeur (au moins) dans *N*.**

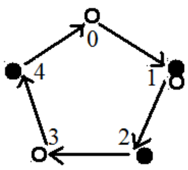
Plusieurs cas peuvent se produire : un graphe orienté peut n’avoir aucun noyau, ou bien un seul, ou encore plusieurs.

Exemples de graphes en forme de circuits



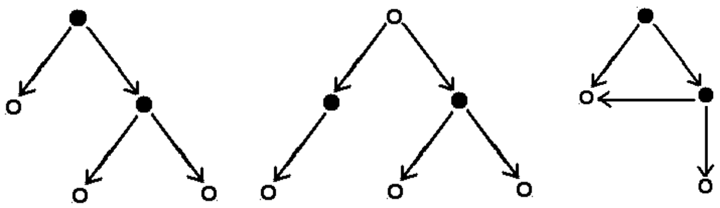
Un circuit est un cycle orienté. Pour les graphes qui sont réduits à un circuit, comme sur la figure ci-dessus, ceux qui ont un nombre *n* impair de sommets n’ont pas de noyau (*à gauche et à droite sur la figure*), ceux qui ont un nombre *n* pair de sommets en ont un (*comme dans le circuit carré au centre*),et même *n*/2 . Les sommets du noyau sont représentés par des cercles d’intérieur blanc.

Prenons l’exemple du circuit pentagone :

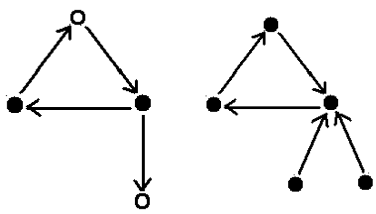


Supposons que son sommet 0 soit un élément du noyau. Alors son prédécesseur 4 n’est pas dans le noyau et son successeur 1 non plus. A son tour le sommet 3 ne peut être que dans le noyau, et son prédécesseur 2 n’est pas dans le noyau. Le sommet 1 devrait être dans le noyau. Contradiction. Pour avoir un noyau, il est indispensable d’avoir une alternance de sommets, un dans *N* et le suivant en dehors de *N*, ce qui impose un nombre pair de sommets.

Autres exemples



Il s’agit là de graphes sans circuit (ou cycle orienté), possédant un noyau unique. Remarquons que les sommets sans successeur – les culs-de sac-, sont forcément des éléments du noyau, et que leurs prédécesseurs ne sont pas dans le noyau.



Ces deux graphes ont un cycle. Le premier possède un noyau, le deuxième n’en a pas.

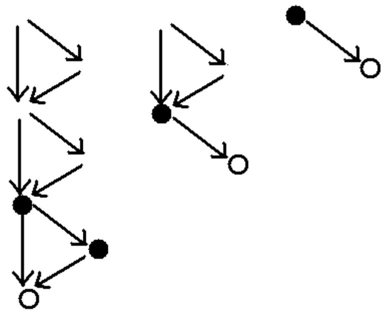
Propriété

Lorsqu’un graphe orienté ne possède aucun cycle orienté (ou circuit), il admet un noyau et celui-ci est unique.

En effet, n’ayant pas de cycle, il admet des culs-de-sac. Ces sommets sont nécessairement des éléments du noyau, et leurs prédécesseurs n’en sont pas. Il en découle un moyen constructif pour avoir le noyau. On prend un cul-de-sac et ses prédécesseurs, on met l’un dans le noyau et les autres hors du noyau, puis on les enlève avec les arcs qui leur sont adjacents. On recommence avec le reste du graphe, autant de fois qu’il faut. A chaque fois, le morceau de graphe restant a un cul-de-sac au moins.

Exemples

1)



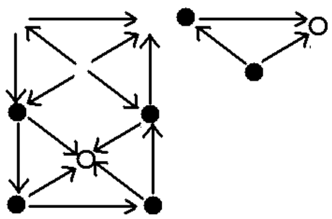
Construction du noyau en trois étapes :

⁎ première étape : on met le cul-de-sac d’en bas dans le noyau et ses deux prédécesseurs hors du noyau.

⁎ deuxième étape : on prend la partie restante du graphe, en mettant son cul-de-sac dans le noyau, et son prédécesseur en dehors.

⁎ troisième étape : on prend ce qui reste du graphe, en mettant son cul-de-sac dans le noyau, et son prédécesseur en dehors.

2)



Construction du noyau en deux étapes.

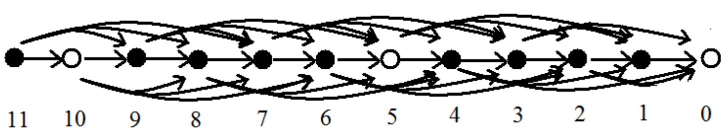
Application à certains jeux

Il s’agit de jeux où deux personnes jouent chacune à leur tour, et où toutes les configurations du jeu ainsi que les évolutions possibles à chaque coup peuvent être représentées respectivement par les sommets et les arcs d’un graphe. Le jeu est aussi supposé se terminer en un nombre fini de coups. Dans ces conditions, le graphe associé ne présente aucun cycle, et le sommet correspondant à une fin victorieuse du jeu est un cul-de-sac, c’est-à-dire un élément du noyau du graphe. Si le premier joueur démarre à partir d’une situation hors du noyau, il peut s’y placer à l’issue du premier coup. Son adversaire, quoi qu’il fasse, ne peut pas aller dans le noyau au cours du 2$^{\text{ème}}$ coup. A son tour, le premier joueur peut se replacer dans le noyau au troisième coup. Et ainsi de suite. En allant dans le noyau à chaque fois qu’il joue, le premier joueur est sûr d’arriver à la position finale du jeu, correspondant à la victoire.

Exemple 1

Onze allumettes sont disposées sur une table. Deux joueurs peuvent enlever chacun à leur tour une, deux, trois ou quatre allumettes. Le gagnant est celui qui enlève les dernières allumettes.

Le graphe correspondant compte 12 sommets de 11 à 0, correspondant aux nombres d’allumettes possibles au cours de la partie, le sommet 0 correspondant à la fin du jeu. Les arcs du graphe correspondent aux coups permettant d’enlever une, deux, trois ou quatre allumettes.



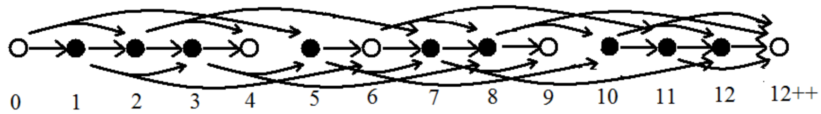
On vérifie que le noyau du graphe est constitué par les sommets 0, 5 et 10. S'il veut gagner à coup sûr, le premier joueur commence par enlever une allumette pour se placer dans le noyau, et il n'a plus qu'à y rester jusqu'à la position gagnante 0.

Cela se généralise à tout jeu où l'on peut enlever de une à P allumettes. Le noyau est constitué des sommets multiples de $P + 1$.

Exemple 2

Chacun des deux joueurs met sur la table un, ou deux, ou cinq euros. Le joueur qui gagne est celui qui ajoute de l'argent de façon que la somme totale atteigne un nombre au carré, soit 4, 9, 16, etc. ou qu'elle dépasse un certain nombre N. Supposons ici que N = 12. Le jeu s'arrête lorsque la somme d'argent vaut 4, 9 ou qu'elle dépasse 12.

Le graphe est constitué de 14 sommets, ceux numérotés de 0 à 12 correspondant à la somme d'argent sur la table, ainsi qu'un dernier sommet correspondant à une somme qui dépasse 12, noté 12++.



Le noyau du graphe est constitué des sommets 0, 4, 6, 9 et 12++. Le premier joueur part de la position 0 et ne peut pas rester dans le noyau à l'issue du premier coup. Si le deuxième joueur connaît la stratégie gagnante, il lui suffit de se placer dans le noyau à chaque fois, et il est sûr de gagner.

Si l'on prend $N = 50$ (il s'agit de dépasser 50 euros), les sommets du noyau sont 0, 4, 6, 9, 12, 16, 18, 21, 25, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 49, 50++.